SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





ARITMÉTICA

Tema: POTENCIACION Y RADICACION

Docente: Ramiro Díaz Vásquez

academiacesarvallejo.edu.pe

OBJETIVOS

1. Estudiar los cuadrados y los cubos perfectos con sus respectivos criterios de inclusión y exclusión.

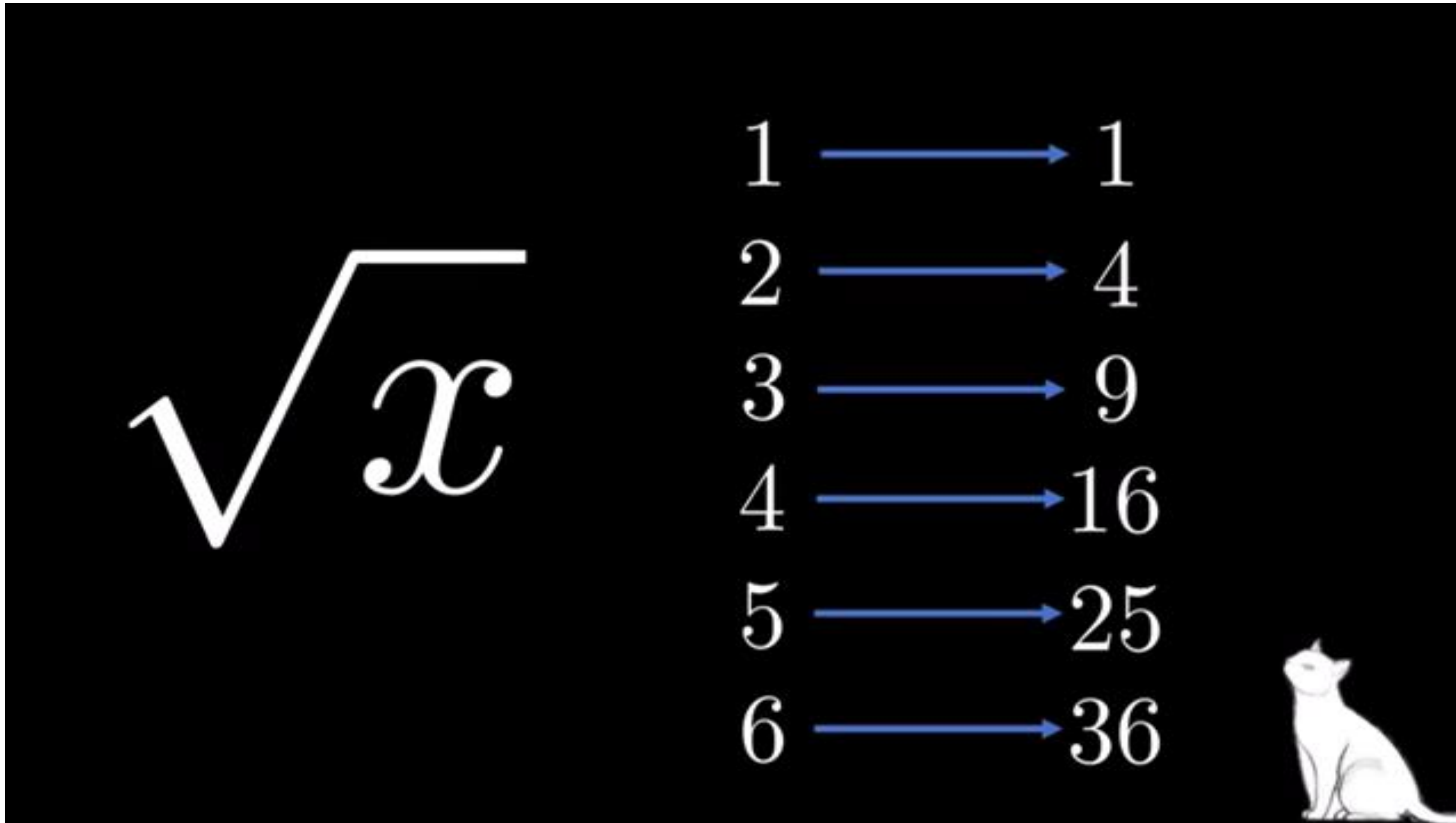
2. Estudiar la raíz cuadrada y raíz cúbica tanto por defecto como por exceso y sus propiedades.

3. Recordar el algoritmo para determinar la raíz cuadrada.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

INTRODUCCIÓN

Cómo calcular una raíz cuadrada con aproximación mentalmente.



POTENCIACIÓN EN LOS $\mathbb{Z}^+$:

Es una operación matemática que consiste en multiplicar varias veces un mismo número.

Ejemplos:

$$\underbrace{4\times4\times4\times4\times4}_{5\text{ factores}}=4^5$$

Potencia perfecta de grado 5

$$\underbrace{7\times7\times7}_{3\text{ factores}}=7^3$$

Potencia perfecta de grado 3

En general:

$$P=\underbrace{a\times a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ veces}}=a^n$$

Donde:

P: *Potencia perfecta de grado n*

a: *Base de la potencia*

n: *Exponente de la potencia*

Teorema fundamental:

Toda potencia perfecta de grado n, tiene por condición necesaria y suficiente que los exponentes de su descomposición canónica sean múltiplos de n.

Ejemplos:

$1728=2^6\times3^3$ — Exponentes $\overset{\circ}{3}$

Por tanto, 1728 es potencia perfecta de grado 3.

$324=2^2\times3^4$ — Exponentes $\overset{\circ}{2}$

Por tanto, 324 es potencia perfecta de grado 2.

$216000=2^6\times3^3\times5^3$ — Exponentes $\overset{\circ}{3}$

Por tanto, 216 000 es potencia perfecta de grado 3.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

CASOS PARTICULARES:

a) Cuadrados perfectos o potencias perfectas de grado 2:

Son aquellos valores enteros cuya descomposición canónica presenta exponentes pares, y se denotan como k^2.

Ejemplos:

$$784 = 2^4 \times 7^2 = (2^2 \times 7)^2 = 28^2$$

$$99225 = 3^4 \times 5^2 \times 7^2 = (3^2 \times 5 \times 7)^2 = 315^2$$

En general:

$$k^2 = a^{2\alpha} \times b^{2\beta} \times c^{2\theta}$$

Dado que todos los exponentes son pares:

$$CD(k^2) = \underbrace{(2\alpha + 1)(2\beta + 1)(2\theta + 1)}_{\text{Impar}}$$

Aplicación 1: (Ex. UNI 2011 – II)

Sea:

$$N = 2(\overline{ab}) + 6(\overline{ab}) + 12(\overline{ab}) + 20(\overline{ab}) + \cdots + 72(\overline{ab}).$$

Si la cantidad de divisores de N es impar. ¿Cuántos valores puede tomar $\overline{ab}$?

Resolución:

Piden: La cantidad de valores que puede tomar $\overline{ab}$

Si: $CD(N)$ es impar $\longrightarrow$ N es cuadrado perfecto.

$$N = \overline{ab}(1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + 8 \times 9) = k^2$$

$$N = \frac{8 \times 9 \times 10}{3}(\overline{ab}) = 8 \times 3 \times 10(\overline{ab}) = k^2$$

$$N = 2^4 \times 3 \times 5 \times \boxed{\overline{ab}} \longrightarrow 3 \times 5 \times n^2$$

$$n \in \{1; 2\}$$

Por lo tanto hay 2 valores posibles.

Respuesta: 2

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

b) Cubos perfectos o potencias perfectas de grado 3:

Son aquellos valores enteros cuya descomposición canónica presenta exponentes múltiplos de 3, y se denotan como k^3.

Ejemplos:

$$8000 = 2^6 \times 5^3 = (2^2 \times 5)^3 = 20^3$$

$$216000 = 2^6 \times 3^3 \times 5^3 = (2^2 \times 3 \times 5)^3 = 60^3$$

En general:

$$k^3 = a^{3\alpha} \times b^{3\beta} \times c^{3\theta}$$

Nota:
Si una expresión es cuadrado perfecto y cubo perfecto al mismo tiempo, la expresión se considera como potencia perfecta de grado 6.

Criterios de inclusión y exclusión de cuadrados y cubos perfectos:

a) Por su última cifra:

k	…0	…1	…2	…3	…4	…5	…6	…7	…8	…9
k^2	…0	…1	…4	…9	…6	…5	…6	…9	…4	…1
k^3	…0	…1	…8	…7	…4	…5	…6	…3	…2	…9

Se observa que:

- Los cuadrados perfectos pueden terminar en las cifras $0;\ 1;\ 4;\ 5;\ 6$ o 9.
- Los cuadrados perfectos no pueden terminar en las cifras $2;\ 3;\ 7$ u 8.
- No hay ninguna restricción para los cubos perfectos.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

b) Por su terminación en cifra 5:

Para cuadrados perfectos:

$$\left(\overline{ab5}\right)^2 = \overline{pqr25}$$

Donde:

$$\overline{pqr} = \overline{ab} \times \left(\overline{ab} + 1\right)$$

Además: $r \in \{0; 2; 6\}$

Ejemplos: $95^2 = 9025$ ($90 = 9 \times 10$) $\quad 205^2 = 42025$ ($420 = 20 \times 21$)

Para cubos perfectos:

$$\left(\overline{ab5}\right)^3 = \overline{pqrt5}$$

Donde:

$Si\ b\ es\ impar \rightarrow t = 7$

$Si\ b\ es\ par \rightarrow t = 2$

Ejemplos: $55^3 = 166375 \quad 65^3 = 274625$

c) Por su terminación en cifras 0:

$Sea: \quad N = \overline{ab\ldots c\underbrace{00\ldots0}_{n\ cifras}}$

Entonces:

N será cuadrado perfecto, si:

- $n: es\ una\ cantidad\ par$
- $\overline{ab\ldots c} = k^2$

N será cubo perfecto, si:

- $n: es\ una\ cantidad\ \overset{\circ}{3}$
- $\overline{ab\ldots c} = k^3$

Ejemplos:

640 000

Es cuadrado perfecto porque $64 = k^2$ y tiene 4 ceros.

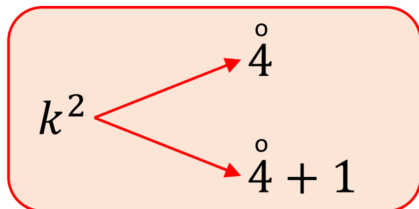
81 000 000

Es cubo perfecto porque $81 = k^3$ y tiene 6 ceros.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

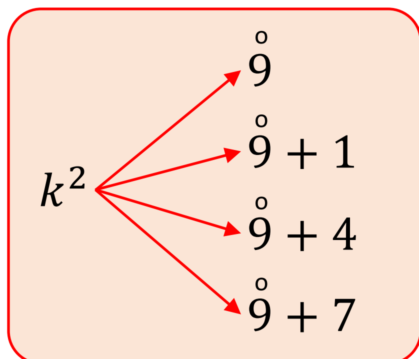
d) Por divisibilidad:

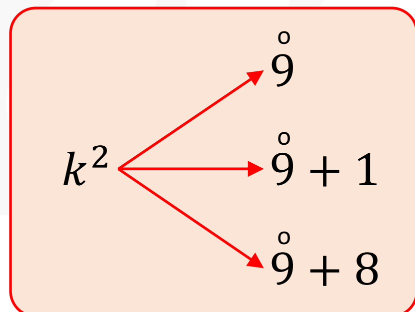
Respecto al módulo 4:



$$k^3 \neq \overset{\circ}{4}+2$$

Respecto al módulo 9:





Nota:
Un número que cumpla con las condiciones anteriores, no necesariamente es un cuadrado o cubo perfecto..

Ejemplos:

$17 = \overset{\circ}{4}+1$ Pero 17 no es cuadrado ni cubo perfecto.

$46 = \overset{\circ}{9}+1$ Pero 46 no es cuadrado ni cubo perfecto.

Aplicación 2: (Ex. UNI 2016 – II)

Sean $a; b; c \in \mathbb{N}$ tales que $\left(\overline{ab}\right)^3 = \overline{1c8ab}$. Entonces el valor de $2b-a-c$ es:

Resolución:

Piden: El valor de $2b-a-c$

Buscando dos cubos perfectos que acoten a $\overline{1c8ab}$

$$8000 < \overline{1c8ab} < 27000$$
$$20 < \overline{ab} < 30$$

Extrayendo raíz cúbica

Se observa, además, que: $\left(\overline{ab}\right)^3 = \overline{1c8ab}$

Por lo que: $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$

21^3	9261
24^3	13824
25^3	15625
26^3	17576
29^3	24389

Por lo tanto, el valor buscado es:

$$2b-a-c = 2(4)-2-3 = 3$$

Respuesta: 3

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

RADICACIÓN EN LOS $\mathbb{Z}^+$:

Es la operación contraria a la potenciación.

En general:

$$\sqrt[INDICE]{RADICANDO} = Raíz\ enésima$$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{343} = 7$	Porque	$7^3 = 343$
$\sqrt[4]{256} = 4$	Porque	$4^4 = 256$
$\sqrt{64} = 8$	Porque	$8^2 = 64$

Nota:
Si la raíz enésima es exacta, entonces dicho número es una potencia perfecta de grado n.

CASOS PARTICULARES:

a) Raíz cuadrada:

Raíz cuadrada exacta:

$\sqrt{256}$ | 16
0

$\sqrt{N}$ | k
0

$N = k^2$

Raíz cuadrada inexacta:

$\sqrt{180}$ | 13
11

Por defecto

$\sqrt{180}$ | 14
16

Por exceso

Por defecto:

$\sqrt{N}$ | k
r_d

$N = k^2 + r_d$

Por exceso:

$\sqrt{N}$ | k
r_e

$N = k^2 - r_e$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Propiedades de la raíz cuadrada inexacta:

$r_{mín} = 1$ $\quad r_{máx} = 2k$ $\quad r_d + r_e = 2k + 1$

b) Raíz cúbica:

Raíz cúbica exacta:

$\sqrt[3]{729}\,|\,9$; residuo 0

$\sqrt[3]{N}\,|\,k$; residuo 0 $\Rightarrow N = k^3$

Raíz cuadrada inexacta:

$\sqrt[3]{240}\,|\,6$; residuo 24

Por defecto

$\sqrt[3]{240}\,|\,7$; residuo 103

Por exceso

Por defecto:

$\sqrt[3]{N}\,|\,k$; residuo r_d $\Rightarrow N = k^3 + r_d$

Por exceso:

$\sqrt[3]{N}\,|\,k$; residuo r_e $\Rightarrow N = k^3 - r_e$

Propiedades de la raíz cúbica inexacta:

$r_{mín} = 1$ $\quad r_{máx} = 3k(k+1)$

$r_d + r_e = 3k(k+1) + 1$

Aplicación 3:

Al extraer la raíz cúbica de $\overline{abc}$ se obtuvo como residuo por defecto 259 y residuo por exceso 12. Calcule $a \times b$.

Resolución:

Piden: El valor de $a \times b$

$\overline{abc} = k^3 + 259 = (k+1)^3 - 12$ $\quad \begin{cases} r_d = 259 \\ r_e = 12 \end{cases}$

$r_d + r_e = 3k(k+1) + 1 = 259 + 12$

$k(k+1) = 90 \longrightarrow k = 9$

Luego:

$\overline{abc} = 9^3 + 259 = 988 \longrightarrow a = 9 \quad b = 8$

$a \times b = 72$

Respuesta: 72

Aplicación 4: (Ex. UNI 2018 – I)

Halle la suma de los dígitos del radicando, donde la diferencia de los dígitos del residuo es 2, además se tiene la siguiente información:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{*\ *\ *\ 0\ *\ *\ 9} & *\ *\ *\ * \\ 1 & \\ \hline \ \ 6\ * & \\ \ \ *\ * & \\ \hline \ \ 1\ 8\ 0\ * & \\ \ \ *\ *\ *\ * & \\ \hline \ \ \ \ \ \ 7\ *\ 4\ 9 & \\ \ \ \ \ \ \ *\ *\ *\ * & \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ *\ * & \end{array}$$

Donde cada $*$ indica un dígito.

Resolución:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\boxed{1}\ \boxed{6}\boxed{2}\ 0\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ 9} & \boxed{1}\boxed{2}\boxed{7}\boxed{3} \\ 1 & 2\boxed{2}\times 2 = 44 \\ \hline \ \ 6\ \boxed{2} & 24\boxed{7}\times 7 = 1729 \\ \ \ \boxed{4}\boxed{4} & 254\boxed{3}\times 3 = 7629 \\ \hline \ \ 1\ 8\ 0\ \boxed{5} & \\ \ \ \boxed{1}\boxed{7}\boxed{2}\boxed{9} & \\ \hline \ \ \ \ \ \ \boxed{7}\boxed{6}\ 4\ 9 & \\ \ \ \ \ \ \ \boxed{7}\boxed{6}\boxed{2}\boxed{9} & \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \boxed{2}\boxed{0} & \end{array}$$

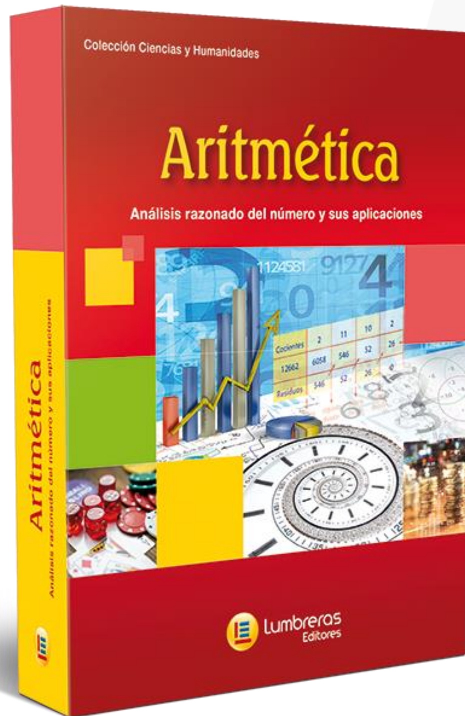
Luego, el radicando es: 1 620 549

Cuya suma de cifras es: 27

Respuesta: 27

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

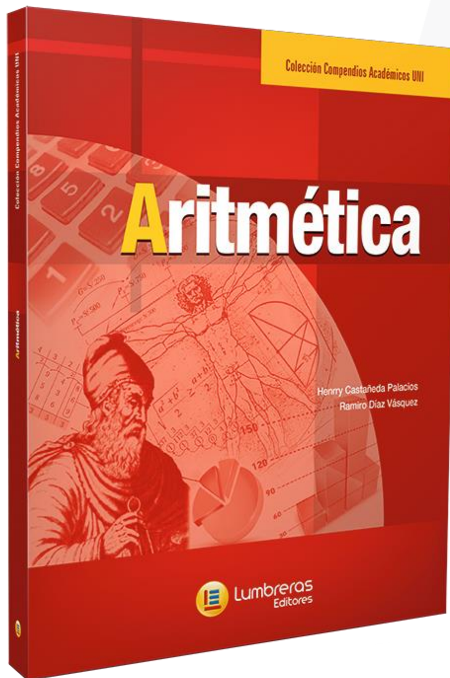
COLECCIÓN CIENCIAS Y HUMANIDADES



- Indispensable para profundizar el conocimiento de la aritmética.
- Su estructura presenta objetivos, introducción en cada tema, teoría amplia y desarrollada con ejemplos y aplicaciones, preguntas resueltas y preguntas propuestas tipo examen de admisión.

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

COLECCIÓN COMPENDIOS ACADÉMICOS UNI



- Estos libros le ayudarán a consolidar sus conocimientos con los temas más frecuentes en exámenes de admisión.
- Su estructura presenta teoría resumida y didáctica, problemas propuestos y sección de claves.



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe